10 Applications aux équations différentielles

Exercice 10.2. On utilise la formule d'inversion du théorème de réciprocité de la transformée de Fourier pour la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\omega|x|}$:

$$\begin{aligned}
xe^{-\omega|x|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}(f)(\xi)e^{i\,x\,\xi}d\xi = -\frac{2\,i\,\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}e^{i\,x\,\xi}d\xi \\
&= -\frac{2\,i\,\omega}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}\cos(\xi x)d\xi + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}\sin(\xi x)d\xi\right).
\end{aligned}$$

Puisque $f(x) = xe^{-\omega|x|} \in \mathbb{R}$ il s'ensuit que (mais c'est évident car la première fonction intégrée est impaire) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi)^2}\cos(\xi x)d\xi = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}\sin(\xi x)d\xi = \frac{\pi}{2\omega}xe^{-\omega|x|}$$

La fonction g définie par $g(\xi) = \dfrac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}\sin(\xi x)$ est paire et on obtient donc que :

$$\int_0^{\infty}\frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)^2}\sin(\xi x)d\xi = \frac{\pi}{4\omega}xe^{-\omega|x|}.$$

En posant $\xi = t$ et en choisissant $\omega = 2$ et $x = \dfrac{1}{2}$ on trouve :

$$\int_0^{\infty}\frac{t}{(t^2+4)^2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{16e}.$$

11 Théorie des distributions

Exercice 11.1. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $R > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $|x| > R$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
T_n(\varphi) &= \int_{-R}^{\varepsilon_n^-} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon_n^+}^{R} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon_n^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon_n^+}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon_n^-} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon_n^+}^{R} \frac{\varphi(0)}{x} dx \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon_n^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon_n^+}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{dx} - \varphi(0)\log\left(\frac{R}{\varepsilon_n^-}\right) + \varphi(0)\log\left(\frac{R}{\varepsilon_n^+}\right) \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon_n^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon_n^+}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{dx} - \log\left(\frac{\varepsilon_n^+}{\varepsilon_n^-}\right)\varphi(0) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx - \log(a)\varphi(0) \\
&= \left\langle \mathrm{v.p.}\frac{1}{x} - \log(a)\delta_0, \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \mathrm{v.p.}\frac{1}{x} + \log(a)\delta_0 \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 11.2. Grâce à la formule des sauts du cours, comme g est continue en zéro et C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que $[g]' = [g'] = [H]$, où H est la fonction de Heaviside. Et on a déjà montré en cours que $H' = \delta_0$, ce qui complète la preuve. On peut aussi faire le calcul direct :

$$\langle Lg, \varphi\rangle = \langle g, \varphi''\rangle = \int_0^\infty x\,\varphi''(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

(Tout les termes de bord à l'infini sont nuls car la fonction est à support compact.)

Exercice 11.3. On a déjà montré dans le premier chapitre que $\Delta \log = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. C'est aussi immédiat en coordonnées polaires, car

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2,$$

et on calcule

$$\begin{aligned}
&\partial_r \log|x| = \partial_r \log(r) = \frac{1}{r} \\
&\partial_r^2 \log|x| = -\frac{1}{r^2},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que

$$\Delta\log|x| = \left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r-\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right)\log r = -\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)+0=0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_\varepsilon(0)}\log|x|\Delta\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)\Delta\log|x|\,dx+\int_{\partial(\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_\varepsilon(0))}\left(\log|x|\,\partial_\nu\varphi-\partial_\nu(\log|x|)\varphi\right)dl$$
$$=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left((\partial_r\log r)\varphi-\log r(\partial_\nu\varphi)\right)dl.$$

Attention au changement de signe ! La fonction φ est lisse. Par conséquent, elle est bornée en 0, on a même

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\log r\,\partial_\nu\varphi\,dl\right|\leq\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)}|\log(\varepsilon)|\int_{\partial B(0,\varepsilon)}dl = 2\pi\varepsilon\,|\log(\varepsilon)|\,\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.$$

D'autre part, on a quand $x\to 0$

$$\varphi(x)=\varphi(0)+O(\varepsilon),$$

ce qui montre que

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)}(\partial_r\log r)\varphi\,dl=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}dl = 2\pi\varphi(0)+O(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}2\pi\varphi(0).$$

Finalement, on obtient

$$\langle\Delta G,\varphi\rangle=\langle G,\Delta\varphi\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log|x|\Delta\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_\varepsilon(0)}\log|x|\varphi(x)=\varphi(0),$$

ce qui montre que

$$\Delta G=\delta_0\qquad\text{dans }\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Plutôt cool, non ?

Exercice 11.4. On a

$$\mathrm{v.p.}\frac{1}{x}=(\log|x|)',$$

ce qui montre que pour tout $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\left|\left\langle\mathrm{v.p.}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle\right|\leq\left|\int_{\mathbb{R}}\log|x|\varphi'(x)dx\right|\leq\left(\int_{-1}^1\log\left(\frac{1}{|x|}\right)dx\right)\|\varphi'\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$$
$$+\left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\frac{\log|x|}{|x|^2}dx\right)\left\|x^2\varphi'\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}=2\left(\|\varphi'\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}+\left\|x^2\varphi'\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\right).$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer les deux intégrales en question, il suffit de remarquer qu'elles sont finies.)

Exercice 11.5. On a déjà montré dans le cours que $e^x \cdot f \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \limsup_{x\to\infty} x^n f(x) \leq \limsup_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0,$$

ce qui montre que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle e^x, f\rangle = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} dx = \infty.$$

Par conséquent, on a $e^x \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ alors que $e^x \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ car la fonction exponentielle est localement intégrable.

Exercice 11.6. On a par inversion de Fourier pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \mathscr{F}(1), \varphi\rangle = \langle 1, \mathscr{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = 2\pi\, \varphi(0) = \langle 2\pi\, \delta_0, \varphi\rangle\,,$$

ce qui montre que

$$\mathscr{F}(1) = 2\pi\, \delta_0,$$

ce qui fait sens car $\mathscr{F}(\delta_0) = 1$, et on retrouve donc l'inversion de Fourier : $\mathscr{F}^2(\delta_0) = 2\pi\delta_0$.

Le second calcul est fait en cours et est donc omis.